Unele elemente privind normalitatea estimatorilor bazaţi pe ecuaţie unică

Prof. univ. dr. Constantin ANGHELACHE
Academia de Studii Economice, Bucureşti, Universitatea „Artifex" din Bucureşti
Conf. univ. dr. Mădălina Gabriela ANGHEL
Universitatea „Artifex" din Bucureşti
Drd. Gyorgy BODO
Drd. Cristina SACALĂ
Academia de Studii Economice, Bucureşti

Abstract

În acest articol, autorii se concentrează asupra normalităţii asimptotice a estimatorului LIML, a LIML proiectat de Fuller şi pe ajustarea 2-stage a celor mai mici pătrate (B2SLS). Sunt prezentate şi discutate ipotezele corespunzătoare, apoi sunt definite teoremele pentru estimatori.

Cuvinte cheie: *ecuatie, instrument, normalitate, estimator, cele mai mici pătrate*

Introducere

Anghelache şi Prodan (2013) se preocupă de utilizarea regresiei simple în studii la nivel macroeconomic, în timp ce Anghel şi Anghelache (2015) au în vedere aplicarea modelelor neliniare. Anghelache şi Popovici (2015) studiază testele de semnificaţie bazate pe variabile instrumentale. Pagliacci, Anghelache şi Mitruţ descriu utilitatea modelelor statistico-econometrice, ca instrumente de analiză economică.

In acest articol se incearca extinderea rezultatelor prezentate de Stock si Yogo (2003a) prin extinderea rezultatelor de normalitate asimptotica pentru estimatorul LIML(limited information maximum likelihood), modificarea LIML a lui Fuller (FLIML) si pentru ajustarea tendineti (bias-adjusted) a estimatorilor celor mai mici patrate in doua etape (B2SLS) la cazul in care slabiciunea instrumentului este astfel incat rata de crestere a parametrului de concentrare r_n este mai inceata decat cea a numarului de instrumente K_n, dar in asa fel incat $\frac{\sqrt{K_n}}{r_n} \to \infty, pentru\ n \to \infty$.

Astfel, vom obtine rezultate cu normalitate asimptotica, in situatii cu instrumente mai slabe decat au fost considerate in alte lucrari.

Notatii folosite :

$Tr(\cdot) -$ urma matricei

> 0 – precizia pozitiva cand se aplica matricei

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$- denota limita superioara a secventei $\{a_n\}\{a_n\}$

$P_X = X(X'X)'X'$ - matricea care se proiecteaza ortogonal in spatiu gama de X si $M_X = I - P_X$.

Model si presupuneri

Se considera modelul cu doua ecuatii simultane (SEM):

$$y_{1n} = y_{2n}\beta + X_n\gamma + u_{n,} \quad (1)$$

$$y_{2n} = Z_n\pi + X_n\varphi + v_n y_{2n} = Z_n\pi + X_n\varphi + v_n, \quad (2)$$

unde, y_{1n} si y_{2n} sunt vectorii $n \times 1$ ai observatiilor celor doua variabile endogene ale sistemului.

X_n este o matrice $n \times J$ a observatiilor variabilelor exogene J, incluse in ecuatia (1)

Z_n este o matrice $n \times K_n$ a observatiilor asupra varialiabilelor instumentale K_n, sau a variabilelor exogene excluse din ecuatia (1)

u_n si v_n sunt $n \times 1$ vectori ai perturbantei aleatoare.

Fie $\eta_i = (u_i, v_i)'$, unde u_i si v_i sunt component I a vectorilor aleatori $u_{n,}$, respectiv v_n.

Se fac urmatoarele ipoteze.

Ipoteza 1

$\pi = \pi_n = \frac{c_n}{b_n}$ pentru unele secvente de numere pozitive secventiale $\{b_n\}$, nedescrescatoare in n, si pentru unele secvente non aleatoare, $K_n \times 1$parametrul vectorilor $\{c_n\}$.

Ipoteza 2

Fie $\{\bar{Z}_{i,n} : i = 1, .., n; n \geq 1\}$ o multime triunghiulara pe R^{K_n+J} variabile aleatoare de prim rang, unde $\bar{Z}_{i,n} = (Z'_{i,n}, X'_{i,n})'$ cu $Z'_{i,n}, X'_{i,n}$ aratand randul i din matricile Z_n, respectiv X_n. Presupunem ca

a) $K_n \to \infty$ si $n \to \infty$ astfel incat $\frac{K_n}{n} \to \alpha$, pentru o constanta α ce satisface conditia $0 \leq \alpha < 1$

b) Fie $m_{1n} \nearrow \infty m_{1n} \nearrow \infty$, $n \to \infty n \to \infty$ si presupunem ca exista constantele $\underline{D}_\lambda \underline{D}_\lambda$ si $\bar{D}_\lambda \bar{D}_\lambda$, cu $0 < \underline{D}_\lambda \leq \bar{D}_\lambda < \infty$ $0 < \underline{D}_\lambda \leq \bar{D}_\lambda < \infty$ astfel incat

$$\underline{D}_\lambda \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \lambda_{\min}\left(\frac{\bar{Z}'_n \bar{Z}_n}{m_{1n}}\right) \text{ aproape sigur} \quad (3)$$

si

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \lambda_{\max}\left(\frac{\bar{Z}'_n \bar{Z}_n}{m_{1n}}\right) \leq \bar{D}_\lambda \text{ aproape sigur} \quad (4)$$

unde $\bar{Z}_n = (Z_n, X_n)$

c) Exista sirul de numere pozitive reale $\{m_{2n}\}$, nedescrescatoare in n, si $0 < \underline{D}_c \leq \overline{D}_c < \infty$, astfel incat $\underline{D}_c \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{c_n' c_n}{m_{2n}}\right)$ si (5)

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{c_n' c_n}{m_{2n}}\right) \leq \overline{D}_c \tag{6}$$

Ipoteza 3

$\bar{Z}_n$ si η_i sunt independente pentru orice i si n.

Ipoteza 4

(a) $\eta_i \equiv i.i.d.(0,\Sigma), unde\ \Sigma > 0$ si $\Sigma \begin{pmatrix} \sigma_{uu} & \sigma_{vu} \\ \sigma_{vu} & \sigma_{vv} \end{pmatrix}$

(a) Exista o constanta D_η cu $0 < D_\eta < \infty$, astfel incat $\max\{E(u_i^8),\ E(v_i^8)\} \leq D_\eta$.

(c) $E(u_i^3) = E(v_i^3) = E(u_i^2 v_i) = E(u_i v_i^2) = 0$.

Ipoteza 5

Se defineste raportul $r_n = \frac{m_{1n} m_{2n}}{b_n^2}$. Presupunem ca $n \to \infty, r_n \to \infty$ astfel incat $\frac{r_n}{K_n} \to 0$, dar $\frac{\sqrt{K_n}}{r_n} \to 0$.

(i) Ipotezele 1 si 2 sunt la fel ca cele facute de Chao si Swanson (2002).

(ii) Ipoteza 4 (c) impune o simetrie a distributiei perturbatiilor modelului cu ecuatii simultane date de ecuatiile (1) si (2).

(iii) Ipoteza 5 isi concentreaza atentia asupra cazului in care parametrul de concentrare creste la o rata mai lenta decat numarul de instrumente K_n, dar la o rata mai rapida decat $\sqrt{K_n}$.

(iv) Ipotezele impun un compromis al conditiilor relative la Donald si Newey (2001) si Stock si Yogo (2003). Ipotezele noastre asupra variabilelor exogene sunt mai slabe decat cele facute de Donald si Newey (2001) si Stock si Yogo (2003). Pe de alta parte, facem ipoteze mai stricte asupra momentelor de distributii de eroare.

Ipoteza 4(b) presupune ca distributiile de eoare sa aiba opt moment finite, pe cand cele definite de Donald si Newey (2001) si Stock si Yogo (2003) au doar patru.

De asemenea, ipoteza 2(a) presupune o conditie mai putin stricta asupra ratei de crestere a numarului de instrumente fata de cea impusa de Donald si Newey (2001) si Stock si Yogo (2003).

Normalitatea asimptotica a esitmatorilor ecuatiei singulare

Ne concentram atentia asupra a trei estimatori:

1. Estimator LIML (Limited information maximum likelihood)

$$\hat{\beta}_{LIML,n} = (y_{2n}' M_{X_n} y_{2n} - \hat{\lambda}_{LIML,n} y_{2n}' M_{\bar{Z}_n} y_{2n})^{-1} \times (y_{2n}' M_{X_n} y_{1n} - \hat{\lambda}_{LIML,n} y_{2n}' M_{\bar{Z}_n} y_{1n}) \tag{7}$$

unde $\hat{\lambda}_{LIML,n}$ este radacina cea mai mica a ecuatiei determinante

$$\det\left\{\begin{pmatrix} y'_{1n}M_{X_n}y_{1n} & y'_{1n}M_{X_n}y_{2n} \\ y'_{2n}M_{X_n}y_{1n} & y'_{2n}M_{X_n}y_{2n} \end{pmatrix} - \lambda_n \begin{pmatrix} y'_{1n}M_{\bar{Z}_n}y_{1n} & y'_{1n}M_{\bar{Z}_n}y_{2n} \\ y'_{2n}M_{\bar{Z}_n}y_{1n} & y'_{2n}M_{\bar{Z}_n}y_{2n} \end{pmatrix}\right\} = 0 \qquad (8)$$

2. Estimatorul LIML modificat Fuller (FLIML)

$$\hat{\beta}_{FLIML,n} = (y'_{2n}M_{X_n}y_{2n} - \hat{k}_{FLIML,n}y'_{2n}M_{\bar{Z}_n}y_{2n})^{-1} \times (y'_{2n}M_{X_n}y_{1n} - \hat{k}_{FLIML,n}y'_{2n}M_{\bar{Z}_n}y_{1n}) \qquad (9)$$

unde $\hat{k}_{FLIML,n}=\hat{\lambda}_{LIML,n} - \frac{a}{n-K_n-J}$, pentru o constanta pozitiva

3. Estimatorul B2SLS (Bias – corrected two-stage least-squares)

$$\hat{\beta}_{B2SLS,n} = (y'_{2n}M_{X_n}y_{2n} - \left(\frac{n}{n-K_n+2}\right)y'_{2n}M_{\bar{Z}_n}y_{2n})^{-1} \times \left(y'_{2n}M_{X_n}y_{1n} - \left(\frac{n}{n-K_n+2}\right)y'_{2n}M_{\bar{Z}_n}y_{1n}\right). \qquad (10)$$

Toti acesti 3 estimatori sunt cazuri speciale a estimatorului de clasa k definit prin:

$$\hat{\beta}_{k,n} = (y'_{2n}M_{X_n}y_{2n} - ky'_{2n}M_{\bar{Z}_n}y_{2n})^{-1}(y'_{2n}M_{X_n}y_{1n} - ky'_{2n}M_{\bar{Z}_n}y_{1n}) \qquad (11)$$

Urmatoarele teoreme prezinta principalele rezultatele asimptotice ale acestei lucrari:

Teorema 1 (LIML) Fie $\hat{\beta}_{LIML,n}$ definit ca in ecuatia (7). Atunci sub ipotezele 1-5 avem $\left(\frac{\psi_n}{\sigma_{L,n}}\right)(\hat{\beta}_{LIML,n} - \beta_0) \xrightarrow{d} N(0,1), n \to \infty$, unde $\psi_n = b_n^{-2}c'_n Z'_n M_{X_n} Z_n c_n$

Teorema 2 (FLIML) Fie $\hat{\beta}_{FLIML,n}$ definit ca in ecuatia (9). Atunci sub ipotezele 1-5 avem $\left(\frac{\psi_n}{\sigma_{L,n}}\right)(\hat{\beta}_{FLIML,n} - \beta_0) \xrightarrow{d} N(0,1), n \to \infty,$

Teorema 3 (B2SLS) Fie $\hat{\beta}_{B2SLS,n}$ definit ca in ecuatia (10). Atunci sub ipotezele 1-5 avem $\left(\frac{\psi_n}{\sigma_{L,n}}\right)(\hat{\beta}_{B2SLS,n} - \beta_0) \xrightarrow{d} N(0,1), n \to \infty,$

Teorema 4 Presupunem ca ipotezele 1 –5 se indeplinesc si $\eta_i \sim E_2(0,\Theta)$, unde $\Theta = \tau\sum$ pentru o constanta pozitiva τ si $E_2(0,\Theta)$. Atunci exista un numar intreg pozitiv N astfel incat pentru orice $n \geq N$

$$\sigma_{B,n}^2 > \sigma_{L,n}^2$$

Concluzii

Am derivat limitele distributiilor estimatorilor LIML, FLIML si B2SLS printr-o configurare a unor instrumente slabe in care convergenta parametrului se presupune ca va creste cu o rata mai slaba decat a numarului de instrumente K_n, dar la o rata mai rapida decat $\sqrt{K_n}$.

Asadar, am obtinut rezultate asimptotice normale a acestor estimatori in situatii cu instrumente mai slabe decat in lucrarile precedente care au folosit cadrul cu innstrumente slabe.

In contextual nostru, ambele rate cea de convergenta si cea de varianta sunt diferite de cazurile cu instrumente puternice, cazuri in care instrumentele cresc cu aceeasi rata sau mai mare decat K_n.

Am gasit, de asemenea, ca estimatorul BSLS nu este asimptotic echivalent cu LIML si FLIML sub scenariul instrumentelor slabe.

Bibliografie

1. Anghelache C., Prodan L. (2013) – „*The Use of Simple Regression in Macroeconomic Analysis*", Knowledge Horizons – Economics, Volume (Year): 5 (2013), Issue (Month): 4 (December), pp. 168-172
2. Anghelache C., Popovici M. (2015) – „*Theoretical Elements Regarding the Tests of Significance Based on Instrumental Variables*", Romanian Statistical Review Supplement, Volume (Year): 63 (2015), Issue (Month): 9 (September), pp. 82-90
3. Anghelache C., Anghel M.G. (2015) – „*Main aspects regarding some non-linear models used in economic analyses*", Romanian Statistical Review Supplement, Volume (Year): 63 (2015), Issue (Month): 9 (September), pp. 7-10
4. Donald S.G., Newey W.K. (2001) – „*Choosing the number of instruments*", Econometrica, Vol. 69, No. 5 (Sep., 2001), pp. 1161-1191
5. Pagliacci M., Anghelache C., Mitruţ C. (2014) – „*Economic Analysis through the Use of Statistical - Econometric Models*", Romanian Statistical Review Supplement, Volume (Year): 62 (2014), Issue (Month): 4 (April), pp. 32-43
6. Stock J.H., Yogo M. (2003) – „Asymptotic Distributions of Instrumental Variables Statistics with Many weak Instruments", working paper, Harvard University